ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67

УДК 517.929.4

Устойчивость слабого решения гиперболической системы с распределенными параметрами на графе

Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ[1] **, Алексей Петрович ЖАБКО**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9

Stability of a weak solution for a hyperbolic system with distributed parameters on a graph

Vyacheslav V. PROVOTOROV[1] **, Aleksei P. ZHABKO**[2]

[1] Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

[2] St Petersburg University

7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russian Federation

Аннотация. В работе указаны условия устойчивости решения эволюционной гиперболической системы с распределенными параметрами на графе, описывающей колебательный процесс сплошной среды в пространственной сети. Гиперболическая система рассматривается в слабой постановке: слабым решением системы является суммируемая функция, удовлетворяющей интегральному тождеству, определяющему вариационную постановку для начально-краевой задачи. Основная идея, определившая все содержание настоящей работы, состоит в представлении слабого решения в виде обобщенного ряда Фурье с последующим анализом сходимости этого ряда и рядов, полученных его однократным почленным дифференцированием. Используемый подход основывается на априорных оценках слабого решения и построении (методом Фаедо–Галеркина со специальным базисом — системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора гиперболического уравнения) слабо компактного семейства приближенных решений в выбранном пространстве состояний. Полученные результаты являются основополагающими при исследовании задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций, имеющих интересные аналогии с колебаниями многофазовых сред многомерной гидродинамики.

Ключевые слова: гиперболическая система; распределенные параметры на графе; слабое решение; устойчивость

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05136197).

Для цитирования: *Провоторов В.В., Жабко А.П.* Устойчивость слабого решения гиперболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 55–67. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67.

Abstract. In the work, the stability conditions for a solution of an evolutionary hyperbolic system with distributed parameters on a graph describing the oscillating process of continuous medium in a spatial network are indicated. The hyperbolic system is considered in the weak formulation: a weak solution of the system is a summable function that satisfies the integral identity which determines the variational formulation for the initial-boundary value problem. The basic idea, that has determined the content of this work, is to present a weak solution in the form of a generalized Fourier series and continue with an analysis of the convergence of this series and the series obtained by its single termwise differentiation. The used approach is based on a priori estimates of a weak solution and the construction (by the Fayedo–Galerkin method with a special basis, the system of eigenfunctions of the elliptic operator of a hyperbolic equation) of a weakly compact family of approximate solutions in the selected state space. The obtained results underlie the analysis of optimal control problems of oscillations of netset-like industrial constructions which have interesting analogies with multi-phase problems of multidimensional hydrodynamics.

Keywords: hyperbolic system; distributed parameters on a graph; weak solution; stability

Acknowledgements: The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic Kazakhstan (project AP05136197).

For citation: Provotorov V.V., Zhabko A.P. Ustoychivost' slabogo resheniya giperbolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [Stability of a weak solution for a hyperbolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 55–67. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа является естественным продолжением исследования по слабой разрешимости гиперболической системы с распределенными параметрами на графе [1]. Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\Big)+b\left(x\right)u\left(x,t\right)=f\left(x,t\right), \tag{0.1}$$

с распределенными параметрами на произвольном ориентированном графе $\Gamma : x \in \Gamma$. Подробное описание коэффициентов уравнения $a(x)$, $b(x)$ и функции $f(x,t)$ приведено ниже. Слабые решения определяются с помощью интегрального тождества, заменяющего собой уравнение, начальные и граничные условия (см., например, монографию О. А. Ладыженской [2, с. 196]). При этом указываются пространства, в которых предлагается отыскание слабого решения, приводятся условия слабой разрешимости такой задачи и последующий анализ устойчивости решения.

Центральная идея, определившая все содержание настоящей работы, состоит в применении используемых в работах [1,3] подходов к анализу эволюционных начально-краевых задач и представлении решения в виде обобщенного ряда Фурье с последующим анализом сходимости этого ряда и рядов, полученным его однократным почленным дифференцированием. Существенную роль будет играть система обобщенных собственных функций и спектральные характеристики эллиптического оператора приведенного выше уравнения (0.1). При этом рассматриваются однородные граничные условия первого рода (условия Дирихле), для граничных условий второго и третьего рода будут даны необходимые указания.

Полученные результаты открывают возможности для исследования задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций.

1. Понятия и обозначения, пространства функций с носителем на графе

Используются обозначения, принятые в работах [1,3,4]: ребра γ графа Γ имеют одинаковую длину, параметризованы и ориентированы отрезком $[0,1]$, при этом концевые точки произвольного ребра γ принимают значения 0 или 1 в зависимости от ориентации; γ_0 — произвольное ребро без концевых точек; Γ_0 — множество всех ребер γ_0; $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T)$, $\gamma_T=\gamma_0\times(0,T)$, $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times(0,T)$; $\partial\Gamma$ — множество граничных узлов, $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов графа Γ. На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по Γ_0 или Γ_T : $\int\limits_{\Gamma_0} f(x)dx=\int\limits_{\Gamma} f(x)dx=\sum\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma} f(x)_\gamma dx$ или $\int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)dxdt=\sum\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma_T} f(x,t)_\gamma dxdt$, где $f(\cdot)_\gamma$ — сужение функции $f(\cdot)$ на ребро γ.

Рассмотрим гиперболическое уравнение (0.1), коэффициенты которого $a(x)$, $b(x)$ являются измеримыми ограниченными функциями и удовлетворяют условиям

$$0<a_*\le a(x)\le a^*,\ |b(x)|\le b^*,\ x\in\Gamma, \tag{1.1}$$

функция $f(x,t)$ определена в области Γ_T.

Обозначим через $L_1(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$ пространства функций, интегрируемых и интегрируемых с квадратом на Γ (аналогично вводятся пространства $L_1(\Gamma_T)$ и $L_1(\Gamma_T)$); $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^1(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично определяется пространство $W_2^2(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx\Big)^{1/2}dt,$$

при этом $L_2(\Gamma_T)\subset L_{2,1}(\Gamma_T)$, что следует из неравенства $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}\le\sqrt{T}\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}$.

З а м е ч а н и е 1.1. Следует отметить, что элементы $W_2^1(\Gamma_T)$ определены на каждом сечении цилиндра Γ_T плоскостью $t=t_0$ как элементы пространства $L_2(\Gamma)$ и непрерывны по t в норме $L_2(\Gamma)$ (см. [2, с. 70]).

В пространстве $W_2^1(\Gamma)$ введем билинейную форму

$$l(\mu,\nu)=\int\limits_\Gamma\Big(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx}+b(x)\mu(x)\nu(x)\Big)dx,$$

имеет место следующее утверждение [5].

Лемма 1.1. *Пусть функция $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$ такова, что $\ell(u,\nu)-\int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx=0$ для любой функции $\eta(x)\in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x)\in L_2(\Gamma)$ — фиксированная функция). Тогда для любого ребра $\gamma\subset\Gamma$ сужение $a(x)_\gamma\frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ.*

Из утверждения леммы следует, что пространство $W_2^1(\Gamma)$ содержит множество $\Omega_a(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций $u(x)$, для которых при каждом $\gamma\subset\Gamma$ сужение $a(x)_\gamma\frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках γ и имеют место соотношения

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma\frac{du(1)_\gamma}{dx}=\sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma\frac{du(0)_\gamma}{dx} \tag{1.2}$$

для внутреннего узла ξ этого ребра γ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$; очевидно $W^1(a,\Gamma) \subset W_2^1(\Gamma)$. Если при этом функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$.

Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W^1(a,\Gamma)$ (см. замечание 1.1) и удовлетворяют соотношениям (1.2) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ в норме $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma_T)$, $W^1(a,\Gamma_T) \subset W_2^1(\Gamma_T)$.

В пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$ для уравнения (0.1) рассматривается первая начально-краевая задача с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{1.3}$$

и однородным граничным условием

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0, \qquad 0 \le t \le T; \tag{1.4}$$

здесь $\varphi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения (1.1).

Определение 1.1. Слабым решением класса $W_2^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) называется функция $u(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_T} \Big(-\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\tfrac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + a(x)\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)u(x,t)\eta(x,t)\Big)\,dxdt = \\ &= \int\limits_{\Gamma} \psi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{1.5}$$

при любых $\eta(x,t) \in \widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ (элементы η пространства $\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ принадлежат $W^1(a,\Gamma_T)$ и удовлетворяют равенству $\eta(x,T) = 0$).

Следуя идеям работы [1] и основываясь на полученных там результатах, приведем утверждения и краткие пояснения к ним, необходимые для дальнейшего анализа поведения слабого решения $u(x,t)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4).

2. Предварительные рассуждения, используемые результаты

Сформулируем утверждения, имеющие для последующего вспомогательный характер, не останавливаясь на деталях рассуждений. Подробные доказательства представлены в работе [1] (см. также [6]).

Основополагающие условия, определяющие слабую разрешимость задачи (0.1), (1.3), (1.4), вытекают из априорной оценки в пространстве $W^2(a,\Gamma_T)$ для решения $u(x,t)$ через исходные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ этой задачи (здесь $W^2(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^2(\Gamma_T)$ множества функций $u(x,t)$ из $W^1(a,\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ также из $L_2(\Gamma_T)$).

Обозначим через $\omega(t) = \int\limits_\Gamma (u^2+u_t^2+u_x^2)dx$, тогда ([1, теорема 1]) для решений $u(x,t) \in W^2(a,\Gamma_T)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4) при выполнении предположений (1.1) и для любого $t \in [0,T]$ имеет место априорная оценка

$$\omega^{1/2}(t) \le C_1(t)\omega^{1/2}(0) + C_2(t)\|f\|_{2,\Gamma_t}, \tag{2.1}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются постоянными a_*, a^*, b^* и временем t. Неравенство (2.1) является аналогом энергетического неравенства для гиперболической системы (0.1) с распределенными параметрами на графе Γ, позволяющее оценить норму решения $u(x,t)$ в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$ через исходные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и внешнюю силу $f(x,t)$. Отсюда нетрудно получить аналогичную оценку энергетической нормы решения $u(x,t)$.

Обратимся к вопросу слабой разрешимости начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$. Дальнейшее предварим рассмотрением спектральной задачи на графе Γ [5,7]

$$-\frac{d}{dx}\Big(a(x)\frac{d\phi}{dx}\Big) + b(x)\phi = \lambda\phi, \qquad \phi|_{\partial\Gamma} = 0,$$

т. е. задачи определения множества таких чисел λ, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $\phi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству

$$l(\phi,\nu) = \lambda(\phi,\nu)$$

при любой функции $\nu(x) \in W^1(a,\Gamma)$. Это означает тот факт, что $\phi(x)$ есть обобщенная собственная функция класса $W^1(a,\Gamma)$, а λ — соответствующее ей собственное значение.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения* (1.1). *Имеют место следующие утверждения.*

1. Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$; *соответственно нумеруются и обобщенные собственные функции:* $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$.

2. Собственные значения λ_k *положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых; если* $b(x) \ge 0$, *тогда собственные значения неотрицательны.*

3. Система обобщенных собственных функций $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $W^1(a,\Gamma)$ *и пространстве* $L_2(\Gamma)$ *(везде ниже* $\|\phi_k\|_{L_2(\Gamma)} = 1$*).*

Условия существования слабого решения начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) представлены следующей теоремой 2.1.

Теорема 2.1. *Для любых* $\varphi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ *и при выполнении предположений* (1.1) *начально-краевая задача* (0.1), (1.3), (1.4) *имеет по меньше мере одно слабое решение из пространства* $W^1(a,\Gamma_T)$.

Для доказательства используется метод Фаедо–Галеркина со специальным базисом $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$, приближения $u^N(x,t)$ слабого решения ищутся в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\phi_k(x), \tag{2.2}$$

функции $c_k^N(t)$ ($\frac{dc_k^N(t)}{dt} \in L_1(0,T)$) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Gamma \frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\phi_l(x)dx + \int\limits_\Gamma \Big(a(x)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} + b(x)u^N(x,t)\phi_l(x)\Big)dx = \\ &= \int\limits_\Gamma f(x,t)\phi_l(xdx \qquad (l=\overline{1,N}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$c_k^N(0) = \varphi_k^N, \qquad \frac{dc_k^N(0)}{dt} = \int\limits_\Gamma \psi(x)\phi_k(x)dx \qquad (k=\overline{1,N}), \tag{2.4}$$

где φ_k^N — коэффициенты Фурье сумм $\varphi^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N \varphi_k^N \phi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$. Равенства (2.3) являются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных $c_k^N(t)$ $(k=\overline{1,N})$. Коэффициенты ее суть ограниченные функции, а правые части принадлежат $L_1(0,T)$. Система (2.3) однозначно разрешима при начальных данных (2.4). Для приближений $u^N(x,t)$ справедлива оценка (2.1). Действительно, умножая каждое из равенств (2.3) на свое $\frac{dc_l^N(t)}{dt}$ и суммируя по l от 1 до N, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Gamma \Big(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t\partial x} + b(x)u^N(x,t)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\Big)dx = \\ &= \int\limits_\Gamma f(x,t)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}dx, \end{aligned}$$

из которого следует (см. [1]) неравенство (2.1) при $u(x,t) = u^N(x,t)$. Правая часть этого неравенства в пространстве $W^1(a,\Gamma)$ мажорируется постоянной C^*, не зависящей от N и $t \in [0,T]$, так что в результате получаем оценку

$$\int\limits_\Gamma \Big(\big(u^N(x,t)\big)^2 + \Big(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\Big)^2\Big)dx \le C^*, \qquad t \in [0,T],$$

а значит, после интегрирования по t от 0 до T

$$\|u^N\|_{W_2^1(\Gamma_T)} \le C_1^*.$$

В силу полученного неравенства из последовательности $\{u^N\}_{N\ge 1}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^{N_i}\}_{i\ge 1}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Gamma_T)$ и равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Gamma)$ к некоторому элементу $u(x,t) \in W_a^1(\Gamma_T)$, которое, как нетрудно проверить, удовлетворяет тождеству (1.5).

З а м е ч а н и е 2.1. Спектральный подход, использующий при доказательстве теоремы существования слабого решения $u(x,t)$ специальный базис $\{\phi_k(x)\}_{k\ge 1}$ и представление приближений $u^N(x,t)$ этого решения в виде конечных разложений (2.2) по функциям $\phi_k(x)$, позволяет формировать системы (2.3), (2.4), аппроксимирующие исходную задачу (0.1), (1.3), (1.4) (представление (2.2) — аппроксимация состояния $u(x,t)$ дифференциальной системы (0.1)). Вместе с анализом устойчивости решения $u(x,t)$, представленным ниже, это позволяет получать теоремы об аппроксимации, применяемые в задачах прикладного характера.

Далее переходим к основному результату исследования — построению слабого решения задачи (0.1), (1.3), (1.4) и анализу его устойчивости.

3. Устойчивость системы (0.1)

Для получения более глубоких результатов несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ и будем предполагать, что $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$, а $0 < b(x) \leq \beta$ при $x \in \Gamma$. Последнее гарантирует положительность собственных значений λ_k, $k \geq 1$ (утверждение 3 леммы 2.1), которые для упрощения дальнейших технических выкладок обозначим через $\mu_k^2 : \lambda_k = \mu_k^2$. В пространстве $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ рассмотрим систему (0.1). Нетрудно проверить, что сумма конечного числа частных решений

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)\phi_k(x)$$

при произвольных коэффициентах a_k и b_k является слабым решением задачи (0.1), (1.3), (1.4) (при $f(x,t) = 0$) с начальными условиями $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x)$ и $\psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k b_k \phi_k(x)$. Здесь следует заметить, что представление $u^N(x,t)$ лишь формально отличается от упомянутого выше представления (2.2). Использование его продиктовано только необходимостью указания роли собственных значений в дальнейших рассуждениях.

Разлагая функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\phi_k(x), \qquad f_k(t) = \int\limits_{\Gamma} f(x,t)\phi_k(x)dx,$$

получим слабое решение задачи (0.1), (1.3), (1.4) в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{\Gamma} f_k(\tau) \sin \mu_k (t - \tau) d\tau] \phi_k(x) \tag{3.1}$$

(правая часть соотношения (3.1) есть сумма конечного числа слабых решений задачи (0.1), (1.3), (1.4), где $f(x,t)$ в (0.1) заменено на $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t)\phi_k(x)$), а значит, формальное решение $u(x,t)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4) представимо рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{0}^{t} f_k(\tau) \sin \mu_k (t - \tau) d\tau] \phi_k(x). \tag{3.2}$$

Установим условия, при которых сумма ряда (3.2) будет слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) в пространстве $W^1(a, \Gamma_T)$, для чего укажем, когда сам ряд (3.2) и ряды, полученные его однократным дифференцированием по x и t, сходятся в среднем (т. е. в $L_2(\Gamma)$). Такая сходимость рядов и будет означать, что $u(x,t)$ является слабым решением задачи (0.1), (1.3), (1.4).

Рассмотрим отрезок ряда (3.2)

$$u_{pq}(x,t) = \sum_{k=p}^{q} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{0}^{t} f_k(\tau) \sin \mu_k (t - \tau) d\tau] \phi_k(x)$$

при $p \geq q$ и коэффициенты b_k, $T_k(t)$ этого ряда (коэффициенты a_k рассмотрим ниже):

$$b_k = \frac{1}{\mu_k} \int\limits_\Gamma \psi(x)\phi_k(x)dx, \qquad T_k(t) = \frac{1}{\mu_k} \int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\mu_k(t-\tau)d\tau.$$

Обозначим через $\beta_k = \mu_k b_k$ и $\theta_k(t) = \mu_k T_k(t)$, причем отметим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 = \int\limits_\Gamma \psi^2(x)dx$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k^2(t)$ сходится равномерно относительно t. Последнее следует из неравенств

$$\theta_k^2(t) \leq \int\limits_0^t \sin^2\mu_k(t-\tau)d\tau \int\limits_0^t f_k^2(\tau)d\tau \leq T \int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k^2(t)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $T \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau$.

Далее рассмотрим коэффициенты a_k и в силу тождества $l(\phi_k, \eta) = \mu_k^2(\phi_k, \eta)$ при любой функции $\eta(x) \in W^1(a, \Gamma)$ имеем (при $\eta(x) = \varphi(x)$)

$$a_k = \int\limits_\Gamma \varphi(x)\phi_k(x)dx = \frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_\Gamma \left[a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d\phi_k(x)}{dx} + b(x)\varphi(x)\phi_k(x)\right] dx = \frac{1}{\mu_k^2}\ell(\varphi, \phi_k).$$

Обозначим через $\alpha_k = \frac{1}{\mu_k}\ell(\varphi, \phi_k)$ и оценим сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ из соотношений $\ell(\phi_k, \phi_s) = \mu_k^2 \delta_{k\,s}$ (здесь $\delta_{k\,s}$ — символ Кронекера), вытекает

$$\begin{aligned}&0 \leq \ell(\varphi - \sum_{k=1}^{N} \tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\phi_k, \varphi - \sum_{k=1}^{N} \tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\phi_k) = \\ &= \ell(\varphi, \varphi) - 2\sum_{k=1}^{N} \tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\ell(\varphi, \phi_k) + \sum_{k=1}^{N} \tfrac{\alpha_k^2}{\mu_k^2}\ell(\phi_k, \phi_k) = \ell(\varphi, \varphi) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2.\end{aligned}$$

Из последнего следует неравенство $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \leq \ell(\varphi, \varphi)$.

Ряд (3.2) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k}[\alpha_k \cos\mu_k t + \beta_k \sin\mu_k t + \theta_k(t)]\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k}\vartheta_k(t)\phi_k(x) \tag{3.3}$$

(здесь через $\vartheta_k(t)$ обозначено выражение $\alpha_k \cos\mu_k t + \beta_k \sin\mu_k t + \theta_k(t)$). Из полученных оценок для $\theta_k(t)$ следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \vartheta_k^2(t)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $3\sum\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^2 + \beta_k^2 + T\int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau]$, тогда сумма его оценивается сверху:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k^2(t) \leq C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)} + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)}). \tag{3.4}$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость по $t \in [0, T]$ ряда (3.3) в норме, определяемой билинейной формой $\ell(\mu, \nu)$ ($\|\cdot\| = \sqrt{\ell(\cdot,\cdot)}$), так как для отрезка $u_{pq}(x,t)$ ряда (3.3) (а значит, и ряда (3.2)) и любого $\epsilon > 0$ найдется номер N_ϵ, не зависящий от t, что имеет место соотношение

$$\ell(u_{pq}, u_{pq}) = \sum_{k=p}^{q} \vartheta_k^2(t) < \epsilon \qquad \forall\, p \geq N_\epsilon, \qquad q \geq p. \tag{3.5}$$

Вследствие определения первого собственного значения $\mu_1^2 > 0$ для любой функции $\nu(x)$ из $W_0^1(a, \Gamma)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Gamma \nu^2(x)dx \leq \frac{1}{\mu_1^2}\ell(\nu, \nu). \tag{3.6}$$

Кроме того, из (1.1) следует:

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\nu(x)}{dx}dx \leq \frac{1}{a_*}\ell(\nu, \nu), \tag{3.7}$$

поэтому, складывая (3.6) и (3.7), получаем

$$\|\eta\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq C_*\ell(\eta, \eta), \quad C_* = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{a_*}. \tag{3.8}$$

Так как функция $u_{pq}(x,t) \in W_0^1(a, \Gamma)$ для любого t, то из (3.5) и (3.8) вытекает неравенство

$$\|u_{pq}\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq C_*\ell(u_{pq}, u_{pq}) \leq C_*\epsilon$$

для любых $p \geq N_\epsilon$, $q \geq p$ и любого t. Последнее показывает, что ряд (3.2) сходится в норме $W_2^1(\Gamma)$ равномерно относительно $t \in [0,T]$, сумма $u(x,t)$ ряда является элементом $W_0^1(a, \Gamma)$, непрерывно зависящим от $t \in [0,T]$.

Аналогичные рассуждения для ряда, полученного почленным дифференцированием один раз по t, приводят к установлению его равномерной сходимости в $L_2(\Gamma)$ относительно $t \in [0,T]$, и поэтому $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ есть элемент $L_2(\Gamma)$, непрерывно зависящий от t. Как следствие, можем утверждать, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) принадлежит $W_0^1(a, \Gamma_T)$. Действительно, каждый член ряда (3.2) (а значит, сумма конечного числа членов) принадлежит $W_0^1(a, \Gamma_T)$. Ряд (3.2) сходится в $W_2^1(\Gamma)$ равномерно по $t \in [0,T]$, а тогда он сходится в $W_2^1(\Gamma_T)$ и сумма его принадлежит $W_0^1(a, \Gamma_T)$ в силу замкнутости $W_0^1(a, \Gamma_T)$ в норме $W_2^1(\Gamma_T)$.

Учитывая сказанное, для начальных условий (1.3) получаем:

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot, \Delta t) - \varphi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq \|u(\cdot, \Delta t) - u(\cdot, 0)\|_{W_2^1(\Gamma)} + \|u(\cdot, 0) - \varphi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} = \\ &= \|u(\cdot, \Delta t) - u(\cdot, 0)\|_{W_2^1(\Gamma)} \to 0\end{aligned}$$

при $\Delta x \to 0$. Аналогично

$$\begin{aligned}&\|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq \|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t}\|_{W_2^1(\Gamma)} + \|\tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t} - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} = \\ &= \|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t}\|_{W_2^1(\Gamma)} \to 0\end{aligned}$$

при $\Delta x \to 0$.

Остается проверить, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) является слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4), т. е. удовлетворяет тождеству (1.5). Следуя [8, с. 81], представим (3.2) в виде

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}[\omega_k(t)+T_k(t)]\phi_k(x),$$

где $\omega_k(t)=a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t$, а $T_k(t)$ определены выше. В силу своего представления функции $T_k(t)$ имеют производную второго порядка для почти всех $t\in[0,T]$, равную $-\mu_k^2T_k(t)+f_k(t)$ и суммируемые с квадратом на $[0,T]$. Тогда и $u^N(x,t)$ имеет обобщенные производные по t до второго порядка, суммируемые с квадратом на Γ_T.

Для любой фиксированной функции $\eta(x,t)\in\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ (пространство $\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ определено выше — см. определение 1.1) рассмотрим интеграл

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\big(-\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}+a(x)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)u^N(x,t)\eta(x,t)-f(x,t)\eta(x,t)\big)dxdt-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\psi(x)\eta(x,0)dx.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в интеграле по Γ_T:

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\{\sum_{k=1}^{N}[(-\mu_k^2T_k(t)+f_k(t)+\mu_k^2\omega_k(t))\phi_k(x)\eta(x,t)-$$
$$-(T_k(t)+\omega_k(t))\big(a(x)\tfrac{d\phi_k(x)}{dx}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)\phi_k(x)\eta(x,t)\big)]-f(x,t)\eta(x,t)\}dxdt-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\big(\psi(x)-\sum_{k=1}^{N}\mu_kb_k\phi_k(x)\big)\eta(x,0)dx.$$

Учитывая тождество $\ell(\phi,\nu)=\mu_k^2(\phi,\nu)$ для любой функции $\nu(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$, которому удовлетворяет ϕ_k, и соотношение $a(x)\frac{d\phi_k(x)}{dx}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)\phi_k(x)\eta(x,t)=\ell(\phi_k,\eta)$ для любой функции $\eta(x,t)\in\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$, окончательно получаем

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\big(\sum_{k=1}^{N}f_k(t)\phi_k(x)-f(x,t)\big)\eta(x,t)dxdt-\int\limits_{\Gamma}\big(\psi(x)-\sum_{k=1}^{N}\mu_kb_k\phi_k(x)\big)\eta(x,0)dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N\to\infty$, приходим к доказательству, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) удовлетворяет тождеству (1.5), а значит, $u(x,t)$ является слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4), причем (см. (3.4)), для любого $t\in[0,T]$ и любого $T<\infty$

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}\le C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)}).$$

Кроме того, вводя норму $\|u(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ соотношением

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}=\int\limits_{\Gamma}\big(u^2+u_t^2+u_x^2\big)dx,$$

получаем, ряд (1.1) сходится в метрике $\|u(\cdot,t)\|_{W_0^1(\Gamma,t)}$ равномерно относительно t и

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}\le C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)})$$

для любого $t\in[0,T]$ и при любом $T<\infty$.

Из последнего неравенства следует корректность рассматриваемой задачи: малому изменению исходных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ в норме пространств, элементами которых они являются, соответствует малое изменение в метрике $\|u(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ решения $u(x,t)$, т. е. при всех $t\in[0,T]$ имеет место неравенство

$$\|u(\cdot,t)-\widetilde{u}(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}\le C(\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi-\widetilde{\psi}\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f-\widetilde{f}\|^2_{L_2(\Gamma_T)}),$$

где $\widetilde{u}$ — слабое решение задачи (0.1), (1.3), (1.4) с измененными исходными данными $\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$ и $\widetilde{f}(x,t)$, постоянная C зависит только от T, a_*, a^* и b. □

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты* $a(x)$, $b(x)$ *— ограниченные измеримые функции на графе* Γ, *удовлетворяющие условиям* (1.1), *и пусть* $\varphi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$. *Слабое решение* $u(x,t)$ *начально-краевой задачи* (0.1), (1.3), (1.4) *имеет представление в виде ряда* (3.2), *который сходится в метрике* $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ *равномерно по* $t \in [0,T]$. *Начально-краевая задачи* (0.1), (1.3), (1.4) *корректна по исходным данным* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $f(x,t)$.

Как следствие из полученной теоремы вытекает: решение однородного уравнения (0.1) (при $f(x,t)=0$) представимо рядом

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos\mu_k t + b_k \sin\mu_k t],$$

сходящимся в норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ равномерно относительно $t \in (-\infty,\infty)$. Решение $u_0(x,t)$ обладает устойчивостью в норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ при всех $t \in (-\infty,\infty)$.

В работе [9] представлены достаточные условия на функцию $f(x,t)$, гарантирующие ее определение в области $\Gamma_0 \times [0,\infty)$ и открывающие пути анализа устойчивости неоднородного решения уравнения (0.1). Получение этих условий опирается на рассуждения, представленные в монографии Ж.–Л. Лионса [10, с. 519].

Представленные выше результаты (утверждения теорем 2.1 и 3.1) можно распространить на многомерный случай. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим сетеподобную ограниченную область $\Im$, состоящую из N областей $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$) и M узловых мест ω_j ($j=\overline{1,M}$, $M<N$): $\Im = \hat{\Im}\bigcup\hat{\omega}$, где $\hat{\Im} = \bigcup\limits_{k=1}^{N}\Im_k$, $\hat{\omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{M}\omega_j$, причем $\Im_k\bigcap\Im_l = \emptyset$ ($k \neq l$), $\omega_j\bigcap\omega_i = \emptyset$ ($j \neq i$), $\Im_k\bigcap\omega_j = \emptyset$ [1, 2]. Области $\Im_k$ в узловых местах ω_j имеют общие границы в виде поверхностей сочленения S_j ($\mathrm{meas}\ S_j > 0$). В каждом узловом месте ω_j поверхность сочленения S_j состоит из m_j областей $\Im_{k_0}$ и $\Im_{k_i}$ ($1 \leq i \leq m_j \leq N-1$): $S_j = \bigcup\limits_{i=1}^{m_j} S_{j\,i}$ ($\mathrm{meas}\ S_{j\,i} > 0$), где S_j и $S_{j\,i}$ являются частями границ $\partial\Im_{k_0}$ и $\partial\Im_{k_i}$ областей $\Im_{k_0}$ и $\Im_{k_i}$, соответственно; $S_{j\,i}$ — двусторонняя область для каждого j,i: $S_{j\,i}^-$ — внутренняя поверхность, $S_{j\,i}^+$ — внешняя поверхность. Таким образом, ω_j определяется поверхностью сочленения S_j, для которой только $S_{j\,i}$ являются поверхностями сочленения $\Im_{k_0}$ с $\Im_{k_i}$, $i=\overline{1,m_j}$. Граница $\partial\Im$ области $\Im$ состоит из объединения границ $\partial\Im_k$ областей $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$), которые не содержат поверхности сочленения каждого узлового места: $\partial\Im = \bigcup\limits_{k=1}^{N}\partial\Im_k \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{M} S_j$.

Область $\Im$ имеет сетеподобную структуру, аналогичную геометрическому графу [11, 12], каждая область $\Im_k$ соединена с другой, ей смежной, посредством узлового места и имеет одну или больше поверхностей сочленения этих областей (сравните со структурой графа: каждое ребро графа имеет две концевые точки (узлы), к которым примыкает один или больше концевых точек (узлов) других ребер).

Используется те же, что и выше, обозначения для пространства Лебега $L_q(U)$ ($q=1,2$) и пространства Соболева $W_2^1(U)$, где U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для каждого k ($1 \leq k \leq N$) обозначим через $W_{2,0}^1(\Im_k)$ замыкание в $W_2^1(\Im_k)$ множества бесконечно дифференцируемых на $\overline{\Im}_k$ функций, равных нулю на $\partial\Im_k \subset \partial\Im$.

Пусть $\Omega_a(\Im)$ — множество функций $u : \Im \to \mathbb{R}^1, u|_{\Im_k} \in W_{2,0}^1(\Im_k)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, N$, и пусть u удовлетворяет условиям согласования

$$u\big|_{S^+_{j\,i}} = u\big|_{S^-_{j\,i}},\ i=\overline{1,m_j},\ \int\limits_{S_j\subset\partial\Im_{k_0}} a(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_j}dx + \sum_{i=1}^{m_j}\int\limits_{S_{j\,i}\subset\partial\Im_{k_i}} a(x)\frac{u(x)}{\partial \mathbf{n}_{j\,i}}dx = 0,$$

для каждого узлового места ω_j на поверхности $S_j = \bigcup\limits_{i=1}^{m_j} S_{j\,i}$, $j=\overline{1,M}$; здесь векторы $\mathbf{n}_j$ и $\mathbf{n}_{j\,i}$ — внешние нормали к S_j и $S_{j\,i}$, соответственно; $a(x)$ — измеримая ограниченная функции из $L_2(\Im)$.

Замыкание множества $\Omega_a(\Im)$ в норме $\|u\|_{\Im} = ((u,u)_{\Im})^{1/2}$, где

$$(u,v)_{\Im} = \sum_{k=1}^{N}(u,v)_{W_2^1(\Im_k)} = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Im_k}\big(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa}\big)dx,$$

назовем пространством $\widetilde{W}_0^1(a,\Im)$.

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(a,\Im)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big) + b(x)u(x,t) = f(x,t),$$

с начальными (1.3) и граничными (1.4) условиями, измеримые ограниченные функции $a(x)$, $b(x)$ удовлетворяют условиям (1.1) (везде Γ заменяется на $\Im$); $f(x,t)\in L_{2,1}(\Im_T)$ ($L_{2,1}(\Im_T)$ — пространство суммируемых на $\Im_T$ функций, $\|u\|_{L_{2,1}(\Im_T)} = \int\limits_0^T(\int\limits_{\Im} u^2dx)^{\frac12}dt$); $\frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big) \equiv \sum\limits_{\iota,\kappa=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big)$.

Основная сложность при анализе такой начально-краевой задачи и доказательстве утверждений, аналогичных представленным в теоремах 2.1 и 3.1, состоит в установлении условий, гарантирующих выполнение утверждений леммы 2.1. В работе [5] указаны пути получения таких условий.

В заключение отметим, что результаты, представленные в работе, можно использовать при анализе задач оптимального управления дифференциальными системами с сетеподобными носителями [6, 11, 13].

References

[1] V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, A. A. Part, “Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **14**:1 (2019), 107–117.

[2] O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1973, 407 pp.

[3] A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:4 (2019), 457–471.

[4] V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitskaya, “Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:3 (2017), 264–277.

[5] A. S. Volkova, V. V. Provotorov, “Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph”, *Russian Mathematics*, **58**:3 (2014), 1–13.

[6] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:2 (2017), 209–224.

[7] V. V. Provotorov, “Expansion of eigenfunctions of Sturm-Liouville problem on astar graph”, *Russian Mathematics*, **3** (2008), 45–57.

[8] О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболических уравнений*, ГИТТЛ, М., 1953, 282 с. [O. A. Ladyzhenskaya, *A Mixed Problem for Hyperbolic Equations*, GITTL, M., 1953 (In Russian), 282 pp.]

[9] A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, “Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:2 (2019), 187–198.

[10] J.-L. Lions, *Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems*, Mir Publ., Moscow, 1972, 587 pp.

[11] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:4 (2017), 431–443.

[12] M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, “On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network”, *Journal of Physics. Conference Series*, **1203** (2019), Article ID 012094.

[13] S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, “Determining the starting function in the task of observing the parabolic system with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Voronezh State Technical University*, **10**:6 (2014), 29–35.

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой управления. Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Провоторов Вячеслав Васильевич
E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.09.2020 г.
Поступила после рецензирования 09.11.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Alexei P. Zhabko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Management Department. St. Petersburg State University, St.-Petersburg, Russian Federation.
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vyacheslav V. Provotorov
E-mail: wwprov@mail.ru

Received 17.09.2020
Reviewed 09.11.2020
Accepted for press 05.03.2021